

LICEO-GINNASIO "M.GIOIA" - PIACENZA

a/s 2000-'01

La chiarificazione definitiva della natura dell'infinito non riguarda esclusivamente l'ambito degli interessi scientifici specializzati, ma è necessaria per la dignità stessa dell'intelletto umano. Da tempo immemorabile l'infinito ha suscitato le passioni umane più di ogni altra questione. E' difficile trovare un'idea che abbia stimolato la mente in modo altrettanto fruttuoso; tuttavia nessun altro concetto ha più bisogno di chiarificazione.

David Hilbert, 1925

C'è un concetto che è il corruttore e l'ammattitore degli altri (...) parlo dell'infinito.

Jorge Luis Borges, 1975

DALL'INFINITO AGLI INFINITI, dalla matematica alle matematiche

percorso di compresenza filosofia/matematica
per la classe 3° liceo scientifico

a cura di Cristina Bonelli
e Renato Sampaolo

LICEO GINNASIO "M.GIOIA" PIACENZA

Modulo di compresenza ***FILOSOFIA-MATEMATICA*** per la classe 3^a liceo scientifico

Compresenza: 1 ora settimanale per il 1° quadrimestre, tot. 17 ore circa.

TITOLO: **"Dall'infinito agli infiniti"**, dalla matematica alle matematiche attraverso il pensiero (non solo) filosofico.

Finalità

Le ragioni della scelta di questo percorso consistono innanzitutto nell'esigenza di connotare fortemente la specificità scientifica nella dimensione della formazione liceale, vale a dire della riflessione epistemologica e filosofica sui saperi scientifici, oltreché nell'individuare tematiche atte a stimolare l'interesse delle ragazze e dei ragazzi verso contesti disciplinari spesso avvertiti come astratti, lontani e non rilevanti nella propria esistenza individuale. Lo studio della matematica può forse acquisire nuovo spessore e significato se svolto in una dimensione storico-problematica che sappia recuperare la *domanda* e l'*orizzonte* culturale entro cui collocare le risposte e le soluzioni matematiche. Abbiamo scelto la questione dell'infinito che, a partire da alcuni nodi problematici posti dalla filosofia e matematica antiche, investe problematicamente tutta la storia del pensiero filosofico e scientifico occidentale, per trovare, almeno per certi suoi aspetti, una forma rigorosa soltanto nella matematica contemporanea. Tale specifico problema ci permette, poi, di mostrare come l'idea di conoscenza e verità assoluta sia illusoria anche nella conoscenza matematica che arriva a pensarsi come sistema incompleto e assiomatico ove ci devono essere verità non dimostrabili (trasferendo e riformulando nella matematica l'argomento kantiano per cui la *completezza* della ragione conduce a idee trascendentali che una serie di antinomie rivela essere pure illusioni). Così il "pensiero forte" di fondazione della matematica (Cantor, Russell) è entrato in crisi per lasciare spazio alla moderna concezione matematica di Bourbaki che si accontenta di soluzioni limitate, che si caratterizza per la consapevolezza delle proprie limitazioni e il rifiuto di metafisiche globali. Da Pitagora a Godel, riflettendo sul problema dell'infinito, la geometria, l'aritmetica e la logica hanno riorganizzato il proprio sapere per divenire oggi forme astratte dello spazio, del tempo e della ragione, del nostro modo di combinare i sensi e il pensiero in una visione del mondo non solo astrattamente razionale ma anche

concretamente comprensibile in quanto la matematica è il linguaggio necessario e sufficiente per descriverlo.

Ci pare allora di poter ipotizzare come insegnamenti desumibili da tale percorso:

- che nessun linguaggio è in grado di arrivare indirettamente alla verità assoluta mediante i suoi argomenti (Godel) e nessun linguaggio è in grado di descrivere direttamente la verità assoluta attraverso le sue definizioni (Tarski)
- che è necessario e possibile tener conto dei limiti del pensiero
- che oggi la matematica consiste in una gran quantità di sistemi assiomatici spesso contrapposti e la loro molteplicità mostra appunto la relatività della nozione di verità matematica (rispetto agli assiomi)

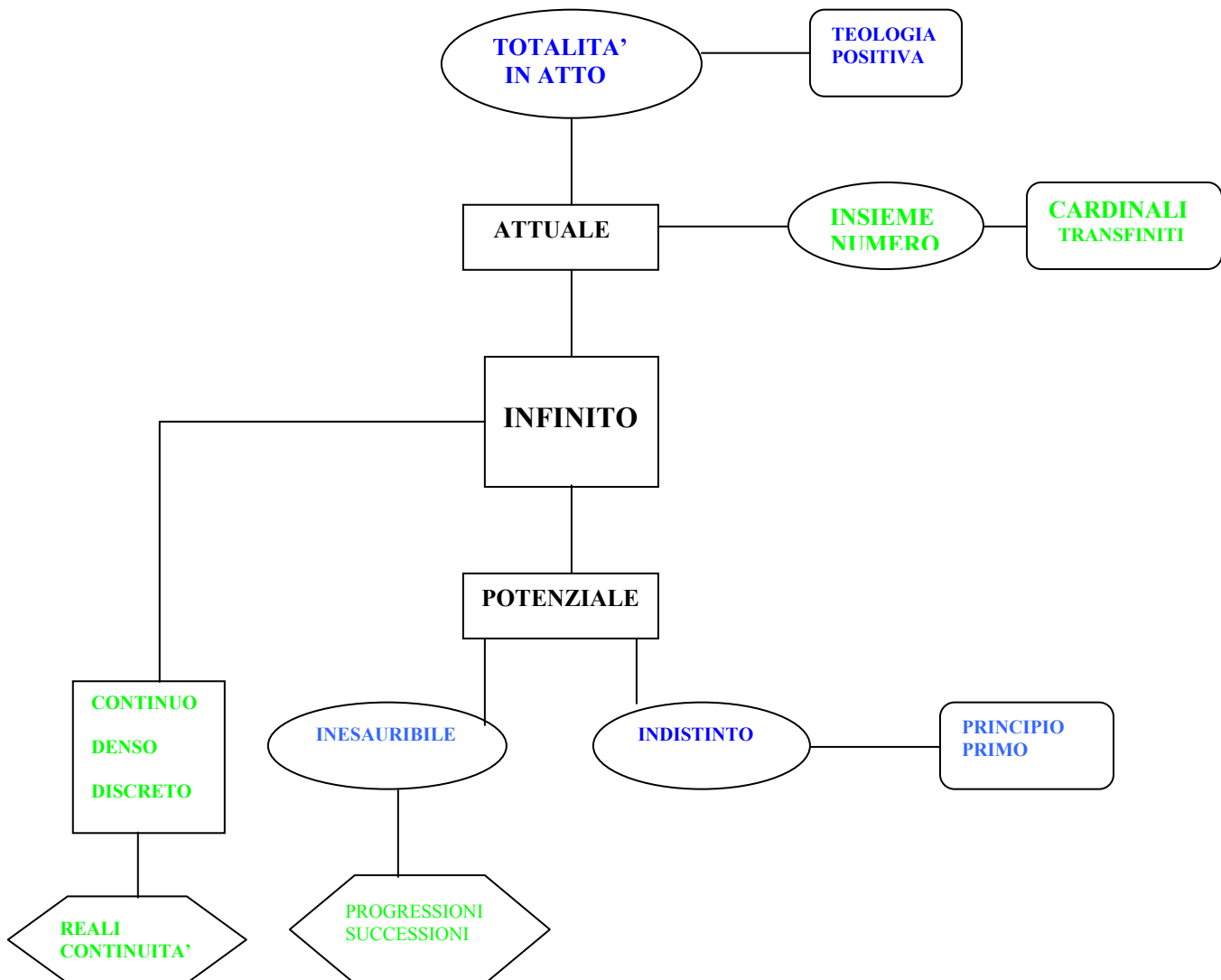
Quanto questa immagine della matematica sia suscettibile di riflessione filosofica e di traducibilità in altri contesti culturali e finanche sociali è poi ciò che la rende stimolante, concreta e finalmente *viva*.

Competenze

- saper individuare analogie e differenze tra concetti/modelli/metodi del sapere scientifico e del sapere filosofico;
- saper inquadrare dal punto di vista storico il concetto d'infinito, cogliendone i diversi significati e la problematicità, oltreché le soluzioni storicamente e concettualmente rilevanti in ordine alla specifica questione;
- saper definire con rigore alcuni concetti fondamentali: numero reale, insieme denso, insieme continuo, cardinalità, insieme infinito;
- saper utilizzare il lessico e le categorie specifiche della filosofia;
- saper analizzare testi filosofici, compiendo su di essi alcune fondamentali operazioni: individuare e comprendere termini e concetti, enucleare le idee centrali, rintracciare e definire la tesi, individuare la strategia argomentativa;
- saper distinguere e analizzare alcune tipologie argomentative specifiche: l'inferenza, la deduzione, la dimostrazione, la dimostrazione per assurdo, il paradosso;
- saper confrontare risposte/soluzioni differenti allo stesso problema;
- saper pensare per modelli diversi e individuare alternative possibili;
- saper cogliere, infine, oltreché l'aspetto problematico del concetto d'infinito, anche la sua fecondità intellettuale nello sviluppo della scienza, in quanto atteggiamento -finanche ludico- del porsi problemi e cercare di risolverli attraverso modalità diverse.

Illustrazione del percorso

MAPPA CONCETTUALE:



1° fase: motivazionale, situazione stimolo per rompere le certezze consolidate e suscitare il problema:

- alcune letture esemplificative (i racconti di Borges: *La biblioteca di Babele*, *Il libro di sabbia*)
- proiezione di diapositive di varie immagini raffiguranti diverse rappresentazioni, concettualizzazioni, espressioni dell'infinito
- brain storming e discussione guidata

consegne di lavoro:

1. leggi il racconto di Borges "La biblioteca di Babele" e prova a disegnare la biblioteca descritta
2. leggi il racconto di Borges "Il libro di sabbia" e poi svolgi i seguenti esercizi:
 - a) all'interno del racconto individua i concetti matematici, specificandone la natura (se sono definizioni, teoremi o terminologia matematica altrimenti utilizzata) e determina lo scopo del loro utilizzo in questo contesto
 - b) analogamente individua quali spunti nel racconto potrebbero essere problemi o domande filosofiche
 - c) individua differenze e analogie tra l'idea d'infinito proposta da "La biblioteca di Babele" e quella che emerge ne "Il libro di sabbia"
 - d) tratta della differenza anche delle suggestioni (sensazioni diverse che trasmettono al lettore) che i due racconti producono riguardo l'idea dell'infinito.

2° fase: alle radici del concetto:

- l'*apeiron* di Anassimandro come infinito illimitato e indistinto (analisi del frammento). "Fantasioso" commento al frammento: l'entropia.
- la concezione negativa dell'infinito: i Pitagorici e la scoperta delle grandezze incommensurabili. Numeri razionali e irrazionali.
- Infinito potenziale e infinito attuale: lettura di brevi testi e discussione sull'infinito potenziale in Leopardi, l'infinito attuale in Galileo e in Hegel, successioni di numeri e successioni di punti. Infinito e nulla: lo zero (lettura da R. Kaplan, *Zero, storia di una cifra*, ed Rizzoli, cap.III, pg.47-56)

consegne di lavoro:

1. analizza e commenta il seguente passo tratto dalla *Fenomenologia dello Spirito*:
"Il bocciolo sparisce nella fioritura, e si potrebbe dire che viene confutato da questa; similmente, all'apparire del frutto, il fiore viene dichiarato una falsa esistenza della pianta, e il frutto subentra al posto del fiore come sua verità. Tali forme non solo si distinguono, ma ciascuna di esse dilegua sotto la spinta dell'altra, perché esse sono reciprocamente incompatibili. Ma, in pari tempo, la loro fluida natura ne fa momenti dell'unità organica, nella quale esse non solo si respingono, ma sono anzi necessarie l'una non meno dell'altra; e questa uguale necessità costituisce, ora, la vita dell'intero".
Con l'esempio dell'albero, del fiore, del frutto, quale concezione hegeliana viene illustrata? Quali sono le tesi principali che vengono espresse? Riferendoti anche agli altri brani letti in classe esponi il rapporto finito-infinito in Hegel.
2. costruisci una mappa concettuale che visualizzi graficamente il concetto d'infinito potenziale e quello d'infinito attuale.

3° fase: problematicità del concetto d'infinito nella storia del pensiero:

- il paradosso: strategia argomentativa, funzione conoscitiva
- Zenone e i paradossi dell'infinito (lettura e analisi dei testi), in particolare elaborazione e riflessione del paradosso di Achille e della tartaruga attraverso la lettura di: L. Carroll, *What the tortoise said to Achilles*, in *Mind*, 1895, L. Borges, *La perpetua corsa di Achille e della tartaruga* e *Metempsicosi della tartaruga* in *Discussione*, 1932; P.

Odifreddi, *E mi sovviene l'eterno Zenone*, in *L'infinito*, quaderno de "Le scienze", n°21, maggio 2001

- Aristotele e la negazione dell'infinito attuale (lettura e analisi dei testi)
- la risposta matematica: i metodi di Eudosso e Archimede, successioni/progressioni, il concetto di serie come somma infinita.
- Cantor e la teoria degli insiemi: confronto di cardinalità tra insiemi (numerici e geometrici), costruzione di insieme delle parti come generatore di insiemi infiniti di cardinalità crescente. Gli insiemi infiniti, cardinali transfiniti
- altri paradossi: Russell e la crisi/ristrutturazione della teoria degli insiemi da cui nacque il sistema assiomatico

consegne di lavoro:

1.(esercizio tratto da: AAVV, *Corso di filosofia*, B.Mondadori, vol.3°)

Uno dei paradossi di Zenone contro il moto è conosciuto come *argomento dello stadio*. Aristotele nella *Fisica* lo espone con queste parole:

"Il quarto paradosso del moto è quello delle masse uguali che si muovono nello stadio in senso contrario a quello di altre masse uguali, le une dalla fine dello stadio, le altre dal mezzo con uguale velocità. E con questo ragionamento egli crede nel risultato che la metà del tempo sia uguale al doppio. Il paralogismo (falso ragionamento che ha apparenza di verità) sta nel supporre che una uguale grandezza venga spostata con uguale velocità in un tempo uguale sia lungo ciò che è mosso sia lungo ciò che è in quiete. Ma questo è falso."

SPIEGAZIONE:

L'argomento zenoniano afferma che in uno stadio un punto mobile va ad una certa velocità, e *simultaneamente* al doppio di essa, a seconda che sia rapportato ad un punto immobile oppure ad un punto moventesi in senso contrario alla stessa velocità, generando in tal modo l'assurdo logico che "la metà del tempo è uguale al doppio". Per chiarire qs argomento si può fare l'es. moderno dei treni: supponiamo tre treni disposti su binari paralleli, di cui i primi due corrano in direzioni opposte con una velocità uguale a 100 km orari, e il terzo sia immobile. Ora la velocità del treno posto al centro apparirà di 100 km orari nei confronti del treno che è immobile e di 200 km orari nei confronti del treno che si muove in senso opposto. Si è detto che Zenone ha inconsapevolmente intuito la teoria della relatività, ovviamente con qs radicale differenza: che ciò che per Einstein è realtà (=la relatività del movimento) per Zenone è un assurdo logico, che testimonia l'impensabilità razionale del ns mondo, e quindi la tesi parmenidea circa il suo carattere apparente e illusorio.

Distinguate:

- a) l'argomento di Zenone;
- b) la critica di Aristotele.

L'argomento di Zenone comprende alcune *ipotesi per assurdo* (sottintese) che vengono confutate e una *conseguenza assurda* (esplicita) che le confuta. Tra i seguenti enunciati individuate le premesse (in numero di due) e la conseguenza assurda:

- il tempo è infinitamente divisibile in parti sempre minori;
- il tempo è divisibile in istanti non ulteriormente divisibili
- lo spazio è infinitamente divisibile
- lo spazio è divisibile solo fino a un limite finito (punto)
- esiste il moto
- metà del tempo è uguale al doppio
- una uguale grandezza viene spostata con uguale velocità in un tempo uguale sia lungo ciò che è mosso sia lungo ciò che è in quiete

Scegliete infine tra i seguenti l'enunciato che meglio spiega la critica aristotelica:

- a) Zenone sbaglia nell'assumere che il tempo sia divisibile in istanti (parti di tempo minime non ulteriormente divisibili)
- b) Zenone sbaglia nel pensare che uno stesso corpo non si possa muovere con velocità diverse nello stesso tempo, una rispetto a un corpo in quiete, l'altra rispetto a un corpo in moto
- c) Zenone sbaglia nell'assumere che metà tempo sia uguale al doppio

2. Dopo lo stimolo fornito dalla lettura di Lewis Carroll, prova tu a inventare un dialogo tra Achille e la tartaruga, rielaborando gli spunti filosofici (e aggiungendo qualcosa di tuo: riflessioni, stile, registro...)

4° fase: proprietà degli infiniti

- Continuo, denso, discreto
- Continuità della retta, definizione di numero reale

5° fase: conclusione

- la ragione consistente ma incompleta (il teorema di Godel),
- la verità come concetto problematico (dal paradosso del mentitore alla teoria della verità di Tarski).
- i paradossi nella matematica contemporanea.

consegne di lavoro:

"Noi (la nostra indivisa divinità che opera in noi) abbiamo sognato il mondo. Lo abbiamo sognato resistente, misterioso, visibile, ubiquo nello spazio e fermo nel tempo; ma abbiamo ammesso nella sua architettura tenui ed eterni interstizi di assurdità, per sapere che è finto" (J. L. Borges)

"La scienza, intesa come scopritrice di verità assolute, rimane disoccupata per mancanza di verità assolute. Ma questo non porta a distruggere la scienza, porta soltanto a una diversa concezione della scienza. Né si potrebbe dire " a svalutazione della scienza": fra concezioni tanto eterogenee non è possibile un'unità di misura comune. Se cade infranto il freddo idolo marmoreo di una scienza perfetta, eterna e universale, che noi potremmo cercare soltanto di sempre meglio conoscere, ecco in sua vece al nostro fianco una creatura viva, la scienza che il nostro pensiero liberamente crea. Creatura viva: carne della nostra carne, frutto del nostro tormento, compagna della lotta e guida alla conquista" (B. De Finetti)

"La scienza non è un sistema di asserzioni certe, o stabilite una volta per tutte, e non è neppure un sistema che avanzi costantemente verso uno stato definitivo. La nostra scienza non è conoscenza (episteme): non può mai pretendere di aver raggiunto la verità, e neppure un sostituto della verità, come la probabilità" (K. R. Popper)

1. A quali aspetti della scienza contemporanea che tu conosci si possono riferire gli autori citati per sostenere le loro tesi?
2. Queste considerazioni approdano a una concezione scettica? Motiva la tua risposta.
3. Conosci altre posizioni analoghe espresse da filosofi e scienziati? Come sono motivate queste posizioni?
4. Possono convivere scienza e filosofia? In quali ruoli e funzioni?

VERIFICA FINALE (seguono allegati di due verifiche intermedie e di due tipi di verifiche finali)

Bibliografia utilizzata

- AAVV, *L'infinito*, quaderno de *Le scienze*, anno IV, n° 21, maggio 2001
- J.L. Borges, *Opere*, 2 voll., Mondadori, Milano, 1984-85
- N. Bourbaki, *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano, 1963
- M.L. Dalla Chiara, G. Toraldo di Francia, *Introduzione alla filosofia della scienza*, Laterza, Bari, 1999
- P. Davies, *Sull'orlo dell'infinito*, Mondadori, Milano, 2000
- R. Kaplan, *Zero, storia di una cifra*, Rizzoli, Milano, 1999
- L. Lombardo Radice, *L'infinito*, Editori Riuniti, Roma, 1981
- G. Micheli, *Infinito*, in *Enciclopedia Einaudi*, vol. 7°, Torino, 1979
- T. Regge, *Infinito*, Mondadori, Milano, 1996
- B. Russell, *Introduzione alla filosofia matematica*, Longanesi, Milano, 1962
- L. Russo, *La rivoluzione dimenticata*, Feltrinelli, Milano, 2001
- A. Sani, *Infinito*, La Nuova Italia, Firenze, 1998
- P. Zellini, *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano, 1980

VERIFICA della compresenza di FILOSOFIA-MATEMATICA

- 1- Infinito potenziale e infinito attuale: prova a darne una definizione che sappia produrre riferimenti filosofici e matematici.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 2- secondo i Pitagorici, la matematica:

- a) è un'astrazione rispetto alla realtà
- b) è una conoscenza convenzionale
- c) ha un valore eminentemente pratico
- d) ha un valore magico-religioso

Quali di queste risposte, a tuo avviso, sarebbero accettabili se riferite alla matematica oggi, e quali no? Perché? Motiva la tua risposta.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- 3- Il concetto di numero secondo Pitagora e secondo Cantor: indicane le caratteristiche e tenta un confronto.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4- Alcune proprietà, vere al finito, non lo sono all'infinito. Giustifica l'asserto (eventualmente con una dimostrazione).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5- Che cosa s'intende per numero cardinale? $\text{CARD}(\mathbb{N})$ e $\text{CARD}(\mathbb{Q})$ sono uguali? Giustifica la risposta.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6- Che cosa dimostra il primo procedimento diagonale di Cantor?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

COGNOME e NOME.....17/11/'00 cl.3°sc.B

VERIFICA della compresenza di FILOSOFIA-MATEMATICA

1- Infinito potenziale e infinito attuale: prova a darne una definizione che sappia produrre riferimenti filosofici e matematici

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

..25/100

2- L'apeiron di Anassimandro è immanente o trascendente? Motiva la tua risposta con riferimento al problema interpretativo del frammento e alla questione dell'infinito

[illegible]

..25/100

This image shows a full page of a notebook or worksheet template. It consists of approximately 20 horizontal dashed lines spaced evenly apart, providing a guide for handwriting practice. The lines are light gray and extend across the entire width of the page. There are no margins, text, or other markings present.

This image shows a full page of a document template. It consists of a series of evenly spaced, horizontal black dotted lines on a plain white background. The lines run across the entire width of the page, providing a guide for writing or drawing. There are no margins, text, or other markings present.

12

VERIFICA di compresenza FILOSOFIA - MATEMATICA

1. TIPOLOGIA di SCRITTURA: SCRITTURA DOCUMENTATA

2. DOCUMENTI:

"C'è un concetto che il corruttore e l'ammattitore degli altri. Non parlo del Male il cui limitato impero è l'etica; parlo dell'infinito."

(Borges, *Discussione*)

"Da dove infatti gli esseri hanno l'origine, ivi hanno anche la distruzione secondo necessità: poiché essi pagano l'uno all'altro la pena e l'espiazione dell'ingiustizia secondo l'ordine del tempo"

(Anassimandro, *DK 12B1*)

"Il secondo è l'argomento detto di Achille. Esso dice che il più lento non sarà mai raggiunto nella corsa dal più veloce. Infatti è necessario che chi insegue giunga prima al punto da cui è partito chi fugge, cosicché il più lento si troverà sempre necessariamente un po' più avanti del più veloce."

(Aristotele, *Fisica*, VI, 239 b14)

"Se dunque non è possibile che l'infinito sia una quantità, così è anche impossibile che sia in un luogo. (...) Che dunque non ci sia in atto un corpo infinito, risulta chiaro da questi argomenti. Che però si abbiano molte conseguenze impossibili se non c'è assolutamente l'infinito, è evidente. (...) Dunque, si dice che l'essere è o in potenza o in atto, e l'infinito è sia per addizione che per detrazione. E' evidente che l'infinito ha sensi diversi se inteso nel tempo, o riferito alle generazioni umane o alla divisione delle grandezze (...) Ne risulta che l'infinito è il contrario di quel che si dice. E' infinito, infatti, non ciò al di fuori del quale non c'è nulla, ma ciò al di fuori del quale c'è sempre qualcosa. Infinito è dunque ciò al di fuori del quale si può sempre assumere qualcosa d'altro relativamente alla quantità. Ciò al di fuori del quale non c'è nulla è perfetto e intero: così appunto definiamo l'intero, come ciò a cui non manca nulla."

(Aristotele, *Fisica*, III, 5, 205b, 6, 207a)

"Lo scopo della mia teoria è quello di stabilire una volta per tutte la certezza dei metodi matematici. (...) La chiarificazione definitiva della natura dell'infinito non riguarda esclusivamente l'ambito degli interessi scientifici specializzati, ma è necessaria per la dignità stessa dell'intelletto umano. Da tempo immemorabile l'infinito ha suscitato le passioni umane più di ogni altra questione. E' difficile trovare un'idea che abbia stimolato la mente in modo altrettanto fruttuoso; tuttavia nessun altro concetto ha più bisogno di chiarificazione."

(D. Hilbert, *Sull'infinito*)

"Un insieme S si chiama infinito se è equipotente a una sua parte; nel caso contrario si chiama finito."

I punti dello spazio formano un insieme equipotente all'insieme dei punti di un segmento"

(Cantor)

"Un sistema assiomatizzabile, non contraddittorio e sufficientemente potente, come l'aritmetica, è sintatticamente incompleto."

Nessun sistema che si suppone assiomatizzabile e coerente, come l'aritmetica, può contenere in sé la dimostrazione della propria non contraddittorietà"

(K. Godel, 1° e 2° teorema)

3. CONSEGNE di SCRITTURA:

- testo espositivo
- estensione: 4 colonne
- collocazione: da definire

4. TITOLO: *Dall'infinito agli infiniti, dalla matematica alle matematiche.*

BUON LAVORO

VERIFICA della compresenza FILOSOFIA-MATEMATICA

1. TIPOLOGIA di SCRITTURA: **relazione**

2. TABELLA

	Definizione ∞	Caratteristiche ∞	Contributi matematici
ANASSIMANDRO			
ZENONE			
ARISTOTELE			
CANTOR			
RUSSELL			
GODEL			

3. Consegne di SCRITTURA:

- utilizzando la tabella d'analisi, evidenzia le principali posizioni riguardo alla questione dell'infinito;
- dal confronto tra i dati raccolti, individua elementi di continuità e d'innovazione;
- rifletti sulla rilevanza della questione dell'infinito nella storia della scienza: quale rottura, cambiamento d'orizzonte fa maturare e perché?

BUON LAVORO

